Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції

М. В.Щеглов
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, 01601)
E-mail: `santa-krus@ukr.net`

Нехай C - простір неперервних функцій на відрізку $I := [0,1]$ зі стандартною нормою

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|$$

Нехай $k \in N$, визначимо

$$\triangle_h^k f(x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_n^k f(x+ih)$$

$k-$ий модуль неперервності функції f в точці $1/k$ визначається наступним чином:

$$\omega_k(f, 1/k) := \sup_{x, x+kh \in I} |\triangle_h^k f(x)|$$

Розглянемо многочлени, які інтегрально наближають функцію f на I, тобто

$$\int_0^{i/k} (f(t) - Q_{k-1}(f,t))dt = 0,\ i = 0, 1...k$$

де $degQ_{k-1}(f,t) \leq (k-1)$

З [1] відомо, що

$$||f - Q_{k-1}|| \leq \widetilde{W}(k)\omega_k(f, 1/k)$$

де $\widetilde{W}(k) = 2$ при $k \leq 82000$ і $\widetilde{W}(k) = 2 + exp(-2)$ при $k > 82000$.

Однак така оцінка "досягається"лише на кінцях відрізка I (якщо точно, то на відрізках $[0; 1/k]$ і $[(k-1)/k, 1]$. Тому постає запитання, чи можна цю оцінку покращити всередині відрізка, тобто отримати, що для $x \in [1/k; (k-1)/k]$ виконується нерівність

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)| \leq p(x)\omega_k(f, 1/k),$$

де $p(x)$ - функція, яка залежить від x (можливо, є константою), але значення якої менші за 2, оцінки, яка вже є відомою.

Основним результатом є наступна теорема:

Теорема 1.

$$|g(x)| \leq \frac{4mlnk}{C_k^m}$$

де $x \in [m/k, (m+1)/k], m < k/2,$ *а* $g := f - Q.$

Оцінка на відрізку симетрична $(Q(f(1-x), t) = Q(f, 1-t))$, тому для тих x, у яких $m > k/2$, отримаємо аналогічну формулу, помінявши в ній m на $k - m$.

Цей вираз уже при $m \geq 1$ буде малим за рахунок того, що $C_k^m \geq k$ при $m \geq 1$ і є набагато меншим за 2 (відому рівномірну оцінку). Крім того, чим більше m, тим ця оцінка краща за попередню отриману оцінку.

Отже, таким чином на відрізку $[1/k; (k-1)/k]$ покращено раніше отриману оцінку для многочлена інтегрального наближення. Отримана в роботі оцінка приблизно дорівнює $O(\frac{m \ln m}{C_k^m})$ на відрізку $[m/k, (m+1)/k]$. Це ще раз підкреслює, що многочлен інтегрального наближення "найгірше"поводить себе близько до кінців відрізка, а всередині наближує його набагато краще. Оскільки це не є досить природним, то дає підстави для подальшого дослідження неперервної на відрізку функції та поліномів, які їх наближають.

Крім того, за умови, що максимум і мінімум на відрізках $[0, 1/k]$ і $[(k-1)/k, 1]$, то за рахунок зміни полінома на сталу або лінійну функцію, можна покращити оцінку найкращого наближення на всьому відрізку. Це покращення буде тим більше, чим більша буде різниця абсолютних величин максимума і мінімума на кінцях відрізка.

Література

[1] Gilewicz, Kryakin, Shevchuk, Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant, Journal of Approximation Theory 119, 271-290.